Fabien Vinsu

T[le]

Spécialité Mathématiques

Incontournables, classiques, Grand Oral :
44 exercices progressifs corrigés et commentés

ellipses

1

Suites définies par une relation de récurrence

Les exercices de ce chapitre sont construits principalement autour des notions suivantes :

➢ Étude des variations d'une suite

➢ Majoration ou minoration d'une suite

➢ Étude de la convergence d'une suite

➢ Détermination d'une expression explicite d'une suite

➢ Recherche d'un seuil

1.1 Suite arithmético-géométrique

On aborde ici les différentes notions relatives à l'étude des suites dans le cadre ultra-classique et sécurisant de l'étude d'une suite arithmético-géométrique.

Énoncé

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 40$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 0{,}8u_n + 3$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geqslant 15$.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) Démontrer que la suite (u_n) converge.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 15$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   (b) Déterminer l'expression explicite de v_n en fonction de n.
   (c) En déduire l'expression explicite de u_n en fonction de n.
   (d) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
   (e) Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 15{,}01$.
4. (a) Écrire, en Python, une fonction `seuil(epsilon)` qui attend en argument un réel strictement positif `epsilon` et qui renvoie le plus petit entier n tel que que $u_n \leqslant 15 +$ `epsilon`.
   (b) Quelle est la valeur renvoyée par la commande `seuil(0.001)` ?

Correction

1. On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= 0{,}8 \times u_0 + 3 \\ &= 0{,}8 \times 40 + 3 \\ &= 32 + 3 \\ &= 35 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_2 &= 0{,}8 \times u_1 + 3 \\ &= 0{,}8 \times 35 + 3 \\ &= 28 + 3 \\ &= 31 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{u_1 = 35} \quad \text{et} \quad \boxed{u_2 = 31}$$

2.(a) Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geqslant 15$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = 40$ donc $u_0 \geqslant 15$. La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n \geqslant 15$.
  On a alors, par hypothèse de récurrence :
  $$u_n \geqslant 15$$
  Puis en multipliant par 0,8 qui est positif :
  $$0{,}8u_n \geqslant 12$$
  Et en ajoutant 3 :
  $$0{,}8u_n + 3 \geqslant 15$$
  Soit :
  $$u_{n+1} \geqslant 15$$
  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion :**
  La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire à partir de ce rang, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $$\boxed{u_n \geqslant 15}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 0{,}8u_n + 3 - u_n \\ &= -0{,}2u_n + 3 \\ &= 0{,}2(-u_n + 15) \end{aligned}$$

Or on a montré, dans la question précédente, que $u_n \geqslant 15$ et donc $-u_n + 15 \leqslant 0$ d'où $0{,}2(-u_n + 15) \leqslant 0$. On en déduit que :

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$

On a donc montré que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$$

(c) La suite (u_n) est décroissante (d'après la question 2b) et minorée par 15 (d'après la question 2a), on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

3.(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 15 \\ &= 0{,}8u_n + 3 - 15 \\ &= 0{,}8u_n - 12 \\ &= 0{,}8\left(u_n - \frac{12}{0{,}8}\right) \\ &= 0{,}8(u_n - 15) \\ &= 0{,}8v_n \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = u_0 - 15 = 40 - 15 = 25$.

(b) On déduit de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0{,}8^n$ soit :

$$\boxed{v_n = 25 \times 0{,}8^n}$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = u_n - 15$ donc $u_n = v_n + 15$ soit :

$$\boxed{u_n = 25 \times 0{,}8^n + 15}$$

(d) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}8^n) = 0$ car $-1 < 0{,}8 < 1$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} (25 \times 0{,}8^n) = 0$ et donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 15}$$

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_n \leqslant 15{,}01 &\iff 25 \times 0{,}8^n + 15 \leqslant 15{,}01 \\ &\iff 25 \times 0{,}8^n \leqslant 0{,}01 \\ &\iff 0{,}8^n \leqslant \frac{0{,}01}{25} \\ &\iff 0{,}8^n \leqslant 0{,}0004 \\ &\iff \ln(0{,}8^n) \leqslant \ln(0{,}0004) \\ &\iff n\ln(0{,}8) \leqslant \ln(0{,}0004) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}0004)}{\ln(0{,}8)} \qquad \textit{(division par un nombre négatif)} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}0004)}{\ln(0{,}8)} \approx 35{,}06$ donc le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 15{,}01$ est :

$$\boxed{n = 36}$$

4.(a) La fonction suivante convient :

```
def seuil(epsilon) :
    u = 40
    n = 0
    while u > 15+epsilon :
        u = 0.8*u + 3
        n = n+1
    return n
```

(b) En exécutant la commande `seuil(0.001)`, on obtient la valeur :

$$\boxed{46}$$

Cela signifie que c'est à partir de u_{46} que $u_n \leqslant 15{,}001$.

Commentaires

- Lorsqu'une suite est croissante et majorée ou décroissante et minorée, alors le théorème de convergence des suites monotones nous permet de conclure que cette suite converge. Cependant cela ne permet pas de déterminer la valeur de la limite (mais seulement un majorant ou un minorant).
- Pour montrer que la suite (u_n) est décroissante, on peut aussi montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$. Dans l'hérédité, il s'agit alors de démontrer que $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.
- Pour montrer que la suite (u_n) est géométrique, plutôt que de factoriser (en force) par 0,8, on peut utiliser la relation $u_n = v_n + 15$ et présenter les calculs de la façon suivante :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 15 \\ &= 0{,}8u_n + 3 - 15 \\ &= 0{,}8u_n - 12 \\ &= 0{,}8(v_n + 15) - 12 \\ &= 0{,}8v_n + 12 - 12 \\ &= 0{,}8v_n \end{aligned}$$

  On en déduit alors que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8.

- On rappelle que si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q alors on a l'expression explicite, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$$

- On rappelle que, pour tout q réel :
  - → Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (q^n) = 0$.
  - → Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (q^n) = +\infty$.
  - → Si $q \leqslant -1$ alors la suite de terme général q^n n'a pas de limite.
  - → Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (q^n) = 1$.
- Lorsque l'on cherche à résoudre une inéquation faisant intervenir une suite dont le terme général est de la forme q^n, l'idée est d'appliquer la fonction logarithme népérien afin de « faire tomber l'exposant ». On fera bien attention au fait que, si $a < 1$ alors $\ln(a) < 0$ et dans ce cas, lorsque l'on divise par $\ln(a)$, il faut penser à changer le sens de l'inégalité.
- Lors de la recherche d'un seuil « entier », il ne faut pas arrondir à l'entier le plus proche mais il faut choisir le premier entier vérifiant la condition donnée. Par exemple, si l'on obtient $n \geqslant 35{,}06$ alors cela implique $n \geqslant 36$.
- Dans un programme Python, on peut utiliser « l'affectation augmentée » afin de modifier la valeur d'une variable. Par exemple, pour augmenter la variable `n` de 1, on peut utiliser « `n += 1` » à la place de « `n = n+1` ».
- Le principe de la démonstration par récurrence est le même que celui de la chute des dominos. Si l'on fait tomber le premier domino et que la chute d'un domino entraîne la chute du suivant, alors tous les dominos tombent. On présente alors de la façon suivante :
  - → **Initialisation :** on fait tomber le premier domino.
  - → **Hérédité :** en tombant, chaque domino entraîne la chute du domino suivant.
  - → **Conclusion :** tous les dominos sont tombés.

1.2 Utilisation d'une fonction

Dans cet exercice, on rencontre une difficulté supplémentaire : on utilise l'étude d'une fonction dans le but d'obtenir des résultats sur la suite étudiée.

Énoncé

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n^2 + 4u_n - 8$$

1. Calculer u_1 et u_2 (on pourra utiliser la calculatrice).
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x - 8$$

   (a) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$6 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8$$

4. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel l.
5. Justifier que l est solution de l'équation $f(x) = x$.
6. En déduire la valeur de l.
7. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 7{,}999$.

Correction

1. On obtient, à l'aide de la calculatrice :

$$\boxed{u_1 = 7} \quad \text{et} \quad \boxed{u_2 = 7{,}75}$$

2.(a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale) et :

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x + 4$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) \geqslant 0 &\iff -\frac{1}{2}x + 4 \geqslant 0 \\ &\iff -\frac{1}{2}x \geqslant -4 \\ &\iff x \leqslant 8 \end{aligned}$$

D'où le tableau :

x	$-\infty$		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	$-\infty$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff -\frac{1}{4}x^2 + 4x - 8 = x \\ &\iff -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 8 = 0 \end{aligned}$$

Il s'agit alors d'une équation du second degré qui admet deux solutions : 4 et 8. L'ensemble solution de l'équation $f(x) = x$ est donc :

$$\boxed{\mathscr{S} = \{4\,;\,8\}}$$

3. Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Montrons alors, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $6 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = 6$ et $u_1 = 7$. On a donc bien $6 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 8$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $6 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8$. On a alors par hypothèse de récurrence :

$$6 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8$$